1. MODELE CONCEPTUALE ŞI TRECEREA SPRE MODELELE CANTITATIVE.

Procesul de conceptualizare, trecerea de la o idee la expresia imaginativă a acesteia, este un pas esenţial în cercetare. Construirea modelelor conceptuale este o parte integrantă a oricărui studiu. Acestea sunt de obicei scheme sau diagrame, de exemplu formate din blocuri (care reprezintă etape, sarcini, comenzi, întrebări, declaraţii etc.) legate prin săgeţi (care indică relaţiile dintre blocuri şi ordinea de parcurgere a etapelor). În blocuri sunt incluse şi variabilele de stare, care descriu condiţiile în care se află elementele sau compartimentele sistemului analizat. Un bun model conceptual ajută biologul să formuleze ipoteze, să evalueze necesarul de date pentru verificarea acestora, să dimensioneze studiul în timp şi spaţiu etc.

Complexitatea modelelor creşte repede cu progresul unei cercetări, motiv pentru care este necesar să ne concentrăm asupra întrebărilor la care dorim să răspundem. Acesta este încă un motiv pentru a alcătui un bun model conceptual, care ne va ajuta astfel să nu ne pierdem în amănunte insignifiante în context şi să ne limităm la ceea ce este relevant.

Există mai multe categorii de modele conceptuale, dintre care le amintesc pe cele mai importante:

- **Modele verbale**

Semnifică descrierea verbală a structurii unui model, a componentelor şi legăturilor dintre acestea. Se utilizează mai frecvent la procese simple.

- **Scheme şi desene**

Foarte des folosite în toate domeniile ştiinţelor naturale, atât ca metodă ştiinţifică, cât şi pentru expunere didactică sau de popularizare. Există o mare varietate de grafice, scheme, desene, care includ o serie de detalii, reprezentări ale unor structuri şi funcţii particulare etc. În ştiinţă desenul se utilizează pentru ilustrarea sintetică a caracteristicilor realităţii investigate, pentru a reliefa şi reprezenta semnificaţia datelor experimentale, a evidenţia tendinţe şi dinamici repetitive etc.

- **Diagrame în blocuri (tip cutie)**

De obicei se realizează prin ansambluri de blocuri interconectate prin săgeţi. Fiecare bloc (sau cutie) are o formă geometrică oarecare definită printr-un chenar, indicând tipul de informaţie sau proces care se desfăşoară, în jurul unui text sau simbol care va constitui o componentă a modelului, iar săgeţile sau liniile indică legăturile dintre acestea. În funcţie de prezenţa sau absenţa factorilor cauzali şi explicativi distingem:

- modele tip **bloc negru** (sau **cutie neagră**)

În acestea se ţine seama numai de intrări şi de ieşiri, adică de valorile de la începutul procesului/ compartimentului şi cele care rezultă în urma acestuia, fără să ne intereseze cauzalitatea şi mecanismul dintre aceste două categorii. Se aplică mai ales la studii de caz, la relaţii de tip statistic, şi în general nu se pot extrapola la alte sisteme.

- modele tip **bloc alb** (sau **cutie albă**)

Sunt modele constituite pe baza expresiei relaţiilor cauzale între procesele analizate. Între datele de intrare şi cele de ieşire sunt intercalate reguli, de tipul ecuaţiilor matematice. Odată definite şi validate, aceste relaţii se pot aplica (cu modificările de rigoare) şi la alte sisteme sau procese similare.

- modele tip **cutie (bloc) gri**

În realitate sunt cele mai comun utilizate, constituind o combinaţie a categoriilor antemenţionate. Acestea conţin relaţii cauzale, dar includ şi legături empirice sau statistice pentru unele procese.

O variantă a modelelor cu blocuri sunt cele de tip **I/O** adică intrare - ieşire (**Input/ Output**) care conţin date suplimentare pentru fiecare cutie, la începerea şi la finalul procesului particular analizat.

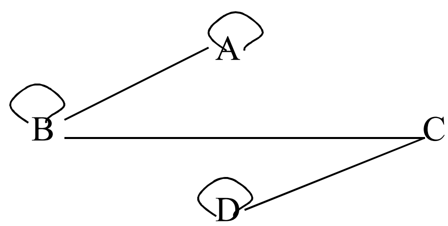
Indiferent de tipul modelului, formele geometrice ale blocurilor pot fi alese astfel încât să mărească sugestivitatea procesului reprezentat. Se poate opta, pentru forme utilizate în algoritmii de calculator, sau forme speciale, cum sunt de exemplu, cele utilizate de E. P. Odum (1971) la descrierea structurii energetice a sistemelor ecologice (ilustrând prin diferite forme intrarea energiei, transferul, pierderile, consumul etc.). În literatură există o mare varietate de definiţii şi posibilităţi de reprezentare grafică.

- **Modelele matriciale**

Se indică prin algebră matricială legătura dintre elementele constituente ale unui sistem. Cea mai simplă formă de expresie este reprezentarea unei legături, fără a se preciza nici valoarea acesteia (intensitatea sau evaluarea cantitativă de orice fel), şi nici direcţia (cine asupra cui acţionează). O variantă este simpla construcţie cu valori de tip 1 şi 0, unde 1 semnifică existenţa relaţiei iar 0 absenţa acesteia. În exemplul de mai jos considerăm 4 elemente (să presupunem că acestea ar fi populaţii ale unei comunităţi), între care există (1) sau nu (0) relaţii de competiţie:

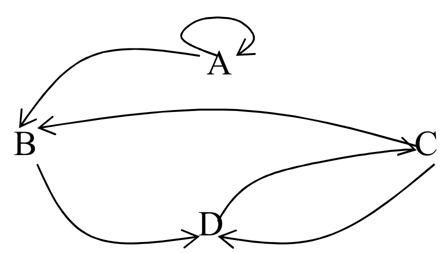
	A	B	C	D
A	1			
B	1	1		
C	0	1	0	
D	0	0	1	1

Aceasta este o matrice simetrică, triunghiulară, valorile de 1 pe diagonala principală indicând o relaţie (competiţie) intraspecifică sau interspecifică. Astfel constatăm că perechile de populaţii între care există relaţii competitive sunt: între A şi B, între B şi C, precum şi între C şi D, singura în interiorul căreia nu am decelat competiţie intraspecifică, fiind populaţia C. Reprezentarea acestei matrici, sub forma unui model conceptual grafic, se poate face printr-un graf neorientat:



Un alt model ne indică cine asupra cui acţionează, caz în care matricea nu trebuie să fie simetrică, iar reprezentarea va fi de tipul unui digraf orientat. De exemplu, fie o comunitate în care valorile de 1 indică cine cu cine se hrăneşte (cine prădează pe cine), iar într-un caz întâlnim şi fenomene de canibalism:

```
               de la (prădează pe...):
               A    B    C    D
          A    1    0    0    0
către:    B    1    0    1    0
(este     C    0    0    0    1
prădat)   D    0    1    1    0
```



În alte modele matriciale nu interesează numai existenţa şi direcţia legăturii, ci şi valoarea acesteia, de exemplu probabilitatea de trecere dintr-o stare în alta, procentul de materie care trece de la un compartiment la altul etc., caz în care matricea poate fi reprezentată sub forma unui digraf numeric orientat (similar cu cel expus mai sus, dar pe fiecare săgeată se scrie valoarea ponderii legăturii sau orice evaluare cantitativă). Numeroase structuri şi procese se pot defini şi reprezenta sub forma unor digrafuri numerice orientate, aceasta fiind totodată o trecere de la modelul conceptual spre unul cantitativ.

Trecerea de la modelul conceptual la modelul cantitativ

Un model cantitativ este un set de expresii matematice şi valori ataşate blocurilor şi săgeţilor modelelor conceptuale. Cele mai multe categorii de modele, prezentate la clasificare, sunt totodată şi cantitative.

Să presupunem că dorim modelarea ratei de consum **C** a unui prădător (variabila dependentă) ca funcţie de disponibilitatea prăzii **P** (variabila independentă). Putem decela cel puţin trei ecuaţii care corespund la tot atâtea ipoteze (adaptat după L. J. Jackson şi col., 2000):

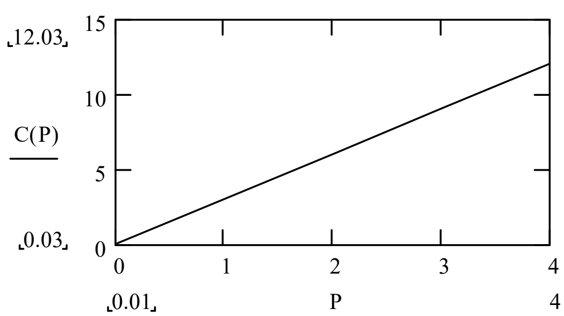
$$1.)C = a * P$$

$$2.)C = \frac{b * P}{1 + c * P}$$

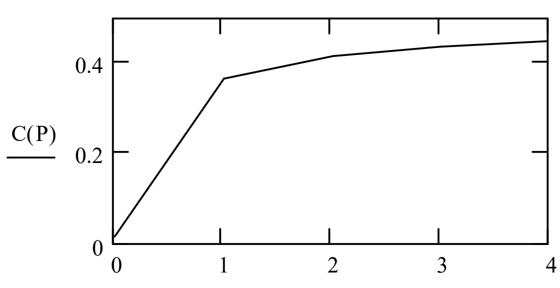
$$3.)C = d * P * e^{-f*P}$$

Reprezentările grafice ale acestor modele sunt redate mai jos.

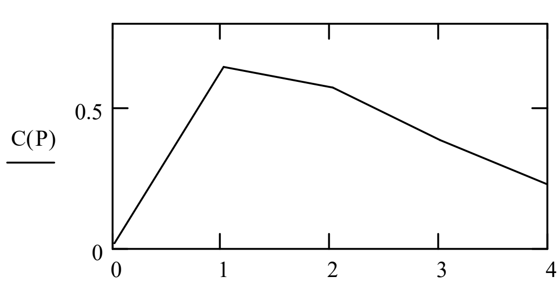
Modelul 1:



Modelul 2:



Modelul 3:



În modelul 1 rata de consum creşte liniar cu disponibilitatea prăzii. La tipul 2 consumul creşte la valori mici ale P, după care se saturează la valori mari ale acesteia, iar în cel de-al treilea model C creşte la valori mici, dar descreşte la valori mari ale lui P (de exemplu ca urmare a intervenţiei apărării sociale la pradă). Aceste trei modele sunt testate pe date reale, prin tehnici statistice, iar coeficienţii implicaţi (a, b, c, d, f) primesc valori, li se evaluează eroarea standard şi semnificaţia. De asemenea vom evalua coeficienţi de determinare, care vor sugera în ce măsură variaţia variabilei dependente este explicată de către cea independentă. Urmează validarea modelelor, adică vom evalua prin diferite simulări şi teste, care dintre modele şi în ce condiţii verifică cel mai bine şirul de date reale (experimentale sau observate).

Prin urmare, evaluarea parametrilor semnifică identificarea valorilor pentru acei coeficienţi care intervin în construcţia ecuaţiilor modelului cantitativ. Sursa de informaţie depinde de modul în care va fi folosit modelul. Uneori evaluarea parametrilor constituie un scop în sine, caz în care modelul va fi rulat de multe ori pe calculator, dându-se un număr oarecare de valori, sau chiar domenii, în care variabilele vor fluctua la întâmplare. Dacă modelul se referă la un sistem particular, despre care avem deja date experimentale, acestea vor fi utilizate pentru a estima parametrii, care vor fi unic definiţi, procedeu caracteristic pentru modelele statistice. Există însă şi posibilitatea de a nu dispune de date reale, caz în care estimările lor se vor realiza printr-un proces iterativ, în cadrul căruia se va compara permanent rezultatul rulării modelului cu cel care se constată prin observarea sistemului, până când se ajunge la o relativă identitate (corespondenţă a rezultatelor). Acesta este un procedeu de **calibrare** a modelului, care se poate realiza prin cercetare sistematică sau prin încercare şi eroare.

În multe cazuri modelele empirice sunt restricţionate la subiectul analizat, deoarece se bazează pe datele disponibile din lumea reală şi pe construirea de relaţii între acestea. Alte modele predictive pot fi însă complexe, generalizabile, incluzând descrieri formale cu valabilitate mai largă, relaţii cauzale şi prognoze bazate pe un număr mai mare de date şi variabile independente.

Dacă am hotărât că modelul cantitativ poate şi merită să fie formulat în termeni de ecuaţii, vom căuta cele mai bune categorii, modalităţi de soluţionare a acestora şi vom evalua parametrii pentru fiecare, înainte de a ne grăbi să le transcriem într-un sistem de programe sau a le codifica într-un limbaj oarecare. Unele ecuaţii sunt construite de cercetător (în special în modelele statistice, precum şi în multe tehnici deterministe), altele se aleg din literatura de specialitate, cunoscându-se faptul că anumite expresii descriu cu o bună acurateţe procesul particular studiat. Selectarea ecuaţiei poate fi impusă de domeniul matematic, care se pretează la analiza condiţiilor cercetării.

Am amintit anterior că urmărirea desfăşurării fenomenelor în timp se poate realiza prin cel puţin trei categorii de tehnici: metode statistice de tipul analizei seriilor de timp, ecuaţii deterministe în timp discret (recurente) sau în timp continuu (ecuaţii diferenţiale).

De exemplu, dacă o variabilă x are valoarea x_t la momentul t şi x_{t+1} la momentul (t+1), atunci **o ecuaţie recurentă (de diferențe)** care descrie un proces ce se urmăreşte în intervale discrete de timp, poate avea forma generală:

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

unde: f este funcţia care descrie variaţia.

De exemplu f(x)= 23.7 - 4.5*x

Dacă cunoaştem valoarea x_t putem prognoza fără probleme şi corect valoarea lui x_{t+1}.

În timp continuu, un proces care se desfăşoară va avea, de exemplu, ecuaţia generală de forma:

$$\frac{d}{dt} g(t) = e^t + 1.8$$

unde: derivata în raport cu timpul a unei funcţii ce descrie un fenomen particular este redată de o anumită expresie matematică. Un model care implică cel puțin o ecuație care conține cel puțin o derivată a unei funcții este un **model diferențial (implică calcul diferențial).** Rezultatul unei asemenea ecuaţii, spre deosebire de penultima, va fi tot o funcţie, care nu este obligatoriu unică. Prin urmare rezultatul va fi de tip deschis (şi nu închis, adică o anumită valoare a lui x_{t+1}, care să fie un anumit număr) şi poate fi reprezentat sub forma graficului funcţiei respective (traiectoria sistemului).

Subliniem aici un lucru important: aceste modele, **recurente și diferențiale**, sunt de tip **determinist** (simplu spus: sunt **modele deterministe**), respectiv **NU sunt modele statistice.** În continuare vom învăța câte ceva despre aceste modele deterministe, care descriu **dinamica proceselor sau a fenomenelor în timp discret (prin ecuații recurente)** sau **în timp continuu (prin ecuații diferențiale). Modele statistice** sunt sau au fost predate **la alte cursuri și la alte aplicații** (în R, în Canoco etc.).

2. MODELE DINAMICE ÎN TIMP DISCRET (MODELE RECURENTE)

Vom studia modelele dinamice sub două aspecte: în timp discret (prin ecuații recurente sau de diferențe), precum și în timp continuu (realizând cu această ocazie și o scurtă introducere în calcul cu funcții derivate și utilizarea ecuațiilor diferențiale). Pentru ilustrare, ne vom referi la populațiile biologice, respectiv vom dezvolta diversele categorii de modele pentru simularea dinamicii populațiilor.

Pentru a caracteriza o populaţie, putem evalua o serie de parametri cantitativi sau calitativi, cum ar fi: abundenţa populaţiei, efectivul, densitatea (ecologică, brută sau absolută), natalitatea (sau orice alt mecanism prin care apar indivizi în interiorul unei populaţii, excluzând imigrarea), mortalitatea, distribuţia pe clase de vârstă (structura de vârstă) sau dimensiuni, distribuţia spaţială, etc. (a se vedea Sîrbu şi Benedek, 2012).

Pentru a urmări dinamica unei populaţii sunt necesare date privitoare la procesele demografice care se desfăşoară (natalitate, mortalitate, imigraţie, emigraţie), a consecinţelor acestora şi a factorilor care le influenţează (Botnariuc şi Vădineanu, 1982). Pentru a cunoaşte efectivul populaţiei la un anumit moment (N_t) este necesară cunoaşterea dimensiunii populaţiei într-un stadiu anterior (N_{t-1}), la care se adaugă numărul de indivizi imigraţi în intervalul de timp (I) şi cei care au apărut (B) în interiorul populaţiei (prin naştere, eclozare sau oricare alt mecanism biologic), scăzându-se numărul de indivizi decedaţi (M) şi cei emigraţi (E). Prin urmare, ecuaţia generală ar fi:

$$N_t = N_{t-1} + B + I - M - E$$

Acesta este un prim model matematic al dinamicii populaţiei, care are avantajul traducerii unui fenomen complex într-o ecuaţie clară şi obiectivă. Ea poate fi manipulată ca orice ecuaţie matematică, conducând la o flexibilitate care depăşeşte orice model conceptual. Dezavantajul metodei constă în faptul că determinarea directă a acestor parametri este posibilă numai în cazuri foarte rare, atunci când populaţia poate fi monitorizată în întregime. Cel mai frecvent, pentru a afla valorile fluctuaţiilor numerice ale indivizilor unei populaţii se apelează la diferite metode estimative şi indirecte. O metodă directă este construirea şi interpretarea tabelelor de viaţă şi de fecunditate. Redăm mai jos tehnica simplificată de construire a unui tabel dinamic de viaţă (care urmăreşte procesele demografice de-a lungul unei generaţii, în absenţa migraţiei) pentru o specie cu generaţii discrete. Tehnica integrală de calcul este redată de I. Sîrbu şi A.M. Benedek (2012) motiv pentru care nu se insistă aici mai mult decât este necesar.

Să considerăm exemplul de mai jos (Tab.1), în care se urmăreşte mortalitatea specifică de vârstă, pe parcursul a 6 stadii de dezvoltare, a unei generaţii de *Chortippus brunneus* (după Richard şi Waloff 1954, ap. Begon şi col. 1986).

Tab. 1. Tabel dinamic de viaţă al unei generaţii de Chorthippus brunneus (adaptat după Richard şi Waloff 1954, ap. Begon şi col. 1986).

x	a_x	l_x	d_x	q_x	F_x	m_x	$l_x m_x$
Ouă (0)	44000	1.000	0.202	0.202	-	-	-
Stadiul 1	3513	0.798	0.224	0.280	-	-	-
Stadiul 2	2529	0.575	0.138	0.240	-	-	-
Stadiul 3	1922	0.437	0.105	0.240	-	-	-
Stadiul 4	1461	0.332	0.037	0.110	-	-	-
Adulţi	1300	0.295	0.295	1.000	22617	17.398	0.514

În acest tabel stadiul, vârsta sau intervalul de timp, este codificat prin x, iar variabilele specifice de stadiu prin indicele subscript $_x$ (de exemplu a_x sau l_x). Variabilele din acest tabel au următoarea semnificaţie:

- a_x = numărul de indivizi în viaţă la începutul fiecărui stadiu. Aceste valori sunt specifice fiecărei populaţii şi an, făcând comparaţiile directe imposibile. De aceea se lucrează cu valori standard, care se trec în coloana următoare, şi anume:
- l_x = proporţia de indivizi din stadiul iniţial care au supravieţuit la începutul stadiului x:
  $l_x = a_x / a_o$
- d_x = proporţia de indivizi eliminaţi din populaţie în fiecare stadiu, adică:
  $(l_x - l_{x+1})$
- q_x = rata mortalităţii specifice de vârstă (stadiu), adică raportul d_x / l_x. Această rată este caracteristică pentru fiecare populaţie şi poate fi înţeleasă ca probabilitatea de deces a unui individ în decursul unui stadiu x.

Până în acest punct ne-am ocupat numai de numărul de indivizi şi am înregistrat variaţiile numerice ale acestora prin variabile standardizate, pentru a permite găsirea unei proceduri de realizare a unor studii comparative.

Tabelul de fecunditate începe cu coloana următoare, în care sunt înregistraţi numărul de urmaşi produşi de generaţia parentală în decursul stadiului x.

- F_x = este coloana în care se înscrie numărul de urmaşi produşi de lotul studiat în stadiul x.
- m_x = numărul mediu de urmaşi produşi de fiecare individ supravieţuitor din stadiul x. Altfel spus, $m_x = F_x / a_x$
- $l_x m_x$ = este produsul între valorile din coloanele l_x şi m_x, semnificând numărul mediu de urmaşi produşi de fiecare individ din stadiul 0 (iniţial) în decursul etapei x.

Dacă notăm cu R suma produselor $m_x l_x$ definim un parametru sintetic al tabelelor de viaţă, şi anume **rata netă de modificare (sau reproducere) a populaţiei.** Aceasta redă factorul de multiplicare al mărimii populaţiei la sfârşitul unei generaţii parentale (de câte ori se poate multiplica mărimea unei populaţii în decursul unei generaţii). Cu alte cuvinte am obţinut un prim model populaţional, care exprimă determinist dinamica acesteia, de forma:

$$N_{t+1} = R_t N_t$$

care este o **ecuaţie recurentă de ordinul 1**, din cauza faptului că relaţionează dimensiunea populaţiei la momentul (t+1) de cea înregistrată la un interval anterior de timp (t). În exemplul de mai sus R_t este valoarea ultimei celule ale produsului $m_x l_x$ = 0.51, semnificând că dimensiunea populaţiei a scăzut la cca. o jumătate faţă de anul precedent (sau generația precedentă).

O **ecuaţie recurentă de ordinul 2** ar implica calcularea dinamicii în două etape, cunoscând efectivele populaţiei la momentele (t) şi (t-1), adică N_t şi N_{t-1}, precum şi ratele fundamentale R_{t-1} (dintre momentul t şi t-1), precum şi R_t (dintre t+1 şi t), adică:

$$N_{t+1} = R_t N_t + R_{t-1} N_{t-1}$$

În mod corespunzător o ecuaţie de diferenţă sau recurentă de ordinul 3 ar implica parametri evaluaţi în trei stadii de timp ale studiului etc. Pornind de la acest exemplu de evaluare a dinamicii populaţionale pe baza tabelelor de viaţă şi de fecunditate, să urmărim dezvoltarea altor categorii de modele, pe care le vom realiza din ce în ce mai complex, în scopul apropierii de cazuri cât mai generale, care aproximează mai corect fenomenele din natură.

După cum am mai specificat, urmărirea unui fenomen în timp se poate face în mod continuu sau în mod discret (în ultimul caz exemplul este chiar tabelul de viaţă precedent). Ecuaţiile matematice care descriu modificările în timp continuu sunt **ecuaţii diferenţiale**, iar cele care caracterizează schimbările în intervale discrete de timp sunt **ecuaţii recurente sau de diferenţe**.

Dezvoltarea modelului dinamicii populaţionale se va baza pe tehnica expusă de Gillman şi Hails (1997).

În exemplul anterior, în care am analizat efectul direct al fecundităţii şi supravieţuirii asupra modificării numerice a populaţiei, am obţinut o ecuaţie care constituie un **model determinist** (depinde explicit numai de parametri de intrare) **independent de densitate** (probabilitatea de supravieţuire a indivizilor din fiecare clasă nu depinde de interacţiunile intraspecifice, condiţionate de abundenţa acestora). Dacă redefinim rata netă de creştere sau de modificare numerică a populaţiei (care ţine seama de produsul dintre supravieţuire şi fecunditate) printr-un termen general, pe care îl definim fie prin expresia **rata finită de creştere a populaţiei λ** (Gillman, Hails, 1997) sau prin expresia adaptată după May (1981, ap. idem) **factorul multiplicativ de creştere pe generaţie,** obţinem ecuaţia generală:

$$N_{t+1} = \lambda N_t$$

care este tot o ecuaţie recurentă de ordinul 1, unde λ este constantă în timp şi se poate calcula pe oricare stadiu corespondent al două generaţii succesive (fiind un model determinist, independent de densitate). Dacă aceste condiţii sunt îndeplinite şi λ este mai mic decât unitatea, va surveni extincţia deterministă a populaţiei.

Invers, cunoscând efectivul populaţiei la momentul (t+1) şi cel de la momentul (t), din ecuaţia anterioară se poate calcula valoarea ratei finite de creştere, prin ecuaţia:

$$\lambda = \frac{N_{t+1}}{N_t}$$

Exemplu: dacă într-un studiu realizat prin metoda tabelelor de viaţă asupra unei specii vegetale (terofită anuală), am numărat pe suprafaţa de probă 23450 de seminţe germinate în anul 1 şi în anul următor (în acelaşi stadiu) 36459, rata finită de creştere a populaţiei se calculează prin relaţia:
$\lambda = 36459 / 23450 = 1.55$.

Este evident că această abordare a dinamicii populaţionale este extrem de simplă. În realitate abundenţa unei populaţii (fie în termeni de efectiv sau densitate) are implicaţii majore asupra capacităţii de supravieţuire şi de fecunditate a indivizilor, prin efectele mecanismelor de reglare intraspecifică (competiţie, stress, probabilitatea de a găsi un partener pentru reproducere etc.). Totodată λ este dependent de fluctuaţiile mediului, variaţii în timp şi spaţiu ale parametrilor abiogeni, fapt care implică renunţarea la ideea de valoare constantă şi trecerea la o **distribuţie de probabilităţi** a valorilor pe care le poate avea în timp. Reglarea populaţională **dependentă de densitate** va modifica corespunzător modelul enunţat, prin faptul că mortalitatea creşte cu abundenţa (efectivul sau densitatea) populaţiei. Dacă notăm cu s proporţia indivizilor care supravieţuiesc (echivalentul parametrului l_x din tabelele de viaţă), iar cu N o măsură a abundenţei populaţiei, care se poate exprima în moduri variate (cum ar fi efectivul, densitatea ecologică sau brută, densitatea absolută etc.), am putea identifica cel puţin trei categorii majore de relaţii între supravieţuire şi abundenţă (**modele dependente de densitate)**, redate în fig. 1.

Ecuaţia generală a dinamicii abundenţei dependente de densitate, devine:
$N_{t+1} = s * \lambda * N_t$

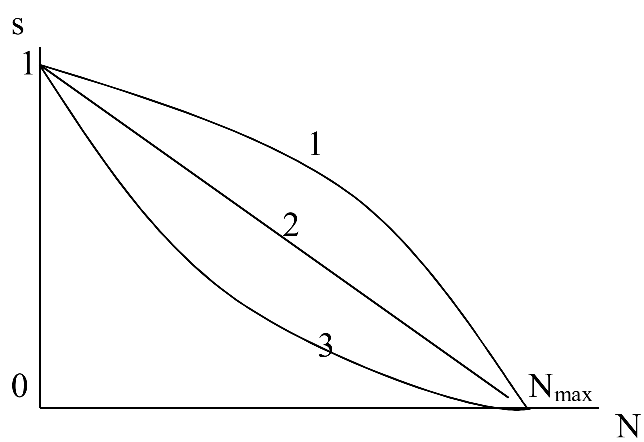


Fig. 1. Trei modele potenţiale de dependenţă între fracţia indivizilor care supravieţuiesc într-o unitate de timp (s) şi densitatea sau abundenţa populaţiei (N); după Gillman şi Hails, 1997.

Cel mai simplu model evidenţiat de fig. 2.1 este relaţia liniară dintre fracţia de supravieţuire s şi abundenţă N (modelul 2). Reamintim că ecuaţia generală a dreptei este:

f(x) = a + bx

unde x este variabila independentă, b este panta dreptei iar a este intercepţia.

Dacă notăm intercepţia ordonatei de către dreaptă cu 1 (valoarea probabilităţii de supravieţuire a unui individ la limita minimă a densităţii) iar panta dreptei de regresie cu m, putem rescrie ecuaţia generală a dreptei ca:

$s = 1 - mN$

Acest model presupune că există un N_{max}, valoarea maximă a densităţii, dincolo de care populaţia este incapabilă să supravieţuiască (în grafic intercepţia abscisei de către dreaptă), deci la care s=0.

Gradientul sau panta dreptei m se poate analoga cu tangenta unghiului format de segmentele definite prin s, N_{max}, O, ceea ce conduce la relaţia:

$$m = \frac{1}{N_{\max}}$$

Prin înlocuirea lui m în ecuaţia generală a modelului dependent de densitate, rezultă:

$$s = 1 - (1 / N_{max})\, N$$

$$s = 1 - N / N_{max}$$

care, repetăm, caracterizează relaţia dintre probabilitatea de supravieţuire a unui individ (sau fracţia de supravieţuire a indivizilor) şi efectivul (abundenţa) populaţiei.

Putem acum să construim un nou model al dinamicii populaţiei, care va evalua efectivul la momentul (t+1), ca funcţie de efectivul din momentul anterior (t), de rata finită de modificare a populaţiei (λ), dar care ţine seama şi de efectele dependente de densitate (s ca funcţie de N), adică:

$$N_{t+1} = \lambda N_t \left(1 - \frac{N_t}{N_{\max}}\right)$$

care este **ecuaţia logistică discretă** a dinamicii populaţionale, dependentă de densitate. Uzual nu se aplică notaţia N_{max} pentru valoarea maximă a densităţii sau abundenţei, ci aceasta este înlocuită cu litera K, având aceeaşi semnificaţie, dar care se mai poate defini şi drept **capacitatea de suport**. Aceasta mai semnifică densitatea maximă a unei specii, care poate fi susţinută (suportată) de un habitat particular. Mulţi consideră că acest parametru caracterizează atât specia particulară, cât şi calitatea habitatului (abundenţa şi disponibilitatea resurselor acestuia). Uneori se operează cu inversul capacităţii de suport, care se notează cu $\alpha = 1/K$

Prin urmare, dacă:

$$N_{\max} = K$$

respectiv

$$\alpha = \frac{1}{K}$$

atunci obţinem ecuaţiile echivalente:

$$N_{t+1} = \lambda N_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

respectiv:

$$N_{t+1} = \lambda N_t (1 - \alpha N_t) = \lambda N_t - \frac{\lambda N_t^2}{K}$$

Am scris aceste relaţii nu pentru a ne juca cu expresii matematice, ci pentru a ilustra faptul, că modelul dependent de densitate nu este liniar ci în mod evident **neliniar**, deci un polinom de gradul 2. Reamintim aici că un model polinomial (o funcţie polinomială) are forma generală:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

unde n este un număr natural; $n \geq 0$. Ordinul sau gradul acestui model este cea mai mare putere a lui x în expresia funcţiei.

Având ecuaţia dinamicii populaţionale dependente de densitate, putem realiza numeroase simulări pe calculator (în programul MathCAD de exemplu) , dând valori parametrilor λ, K şi N_t, respectiv urmărind modul în care aceştia se reflectă în variaţiile valorii aşteptate N_{t+1}.

Studiu de caz: Am alcătuit un model al dinamicii populaționale în timp discret (model de diferențe sau recurent) și reprezentăm o serie de grafice care să simuleze dinamica populaţională anuală pentru diferite valori ale lui λ, la K=100 şi K=200, pentru un interval de timp de 21 de ani şi efectiv iniţial cunoscut (30 de indivizi), utilizându-se modelul logistic discret.

Reprezentarea modelelor și simularea dinamicii acestora:

$K1 := 100 \quad K2 := 200 \qquad \lambda := 2 \quad t := 1..20$

$N_1 := 30 \quad D_1 := 30$

$$N_{t+1} := \lambda \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K1}\right) \qquad\qquad D_{t+1} := \lambda \cdot D_t \cdot \left(1 - \frac{D_t}{K2}\right)$$

prin care modelăm dinamica a două populaţii caracterizate prin valori diferite ale capacităţii de suport (K1 şi K2). Apelarea modulului de grafică bidimensională, va produce graficul din fig. 2.

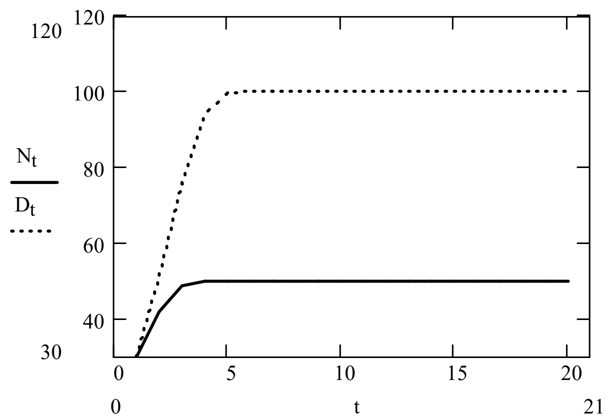


Fig. 2. Model logistic discret al dinamicii populaţionale la λ=2.0

Dinamica modelului populaţional la λ=2 aproximează o creştere logistică, ce se încheie cu un echilibru staţionar al efectivului în timp, care depinde de valoarea lui K. Păstrând aceleaşi date ale problemei, dar alegând λ = 3.0 obţinem fig. 3.

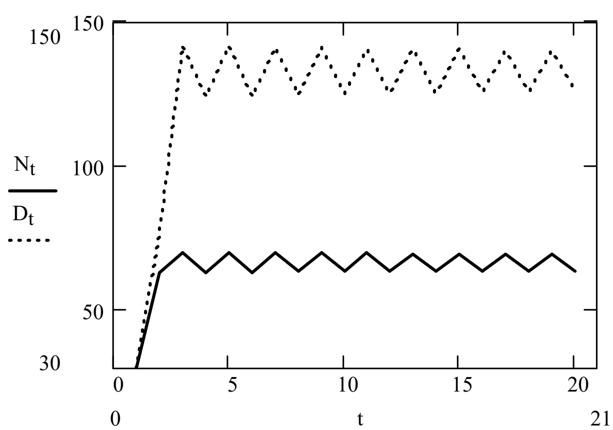


Fig. 3. Model logistic discret al dinamicii populaţionale la λ=3.0

Aceasta indică un echilibru dinamic, ce se caracterizează prin oscilaţii periodice între două valori ale densităţii (un maxim şi un minim): se mai numesc şi **cicluri limită în două puncte**.

Mărind valoarea lui λ la 3.5 vom obţine graficul de mai jos, care corespunde cu un echilibru **ciclic în patru puncte (**fig. 4), deoarece există două maxime (unul principal și unul secundar), precum și două minime cu valori diferite.

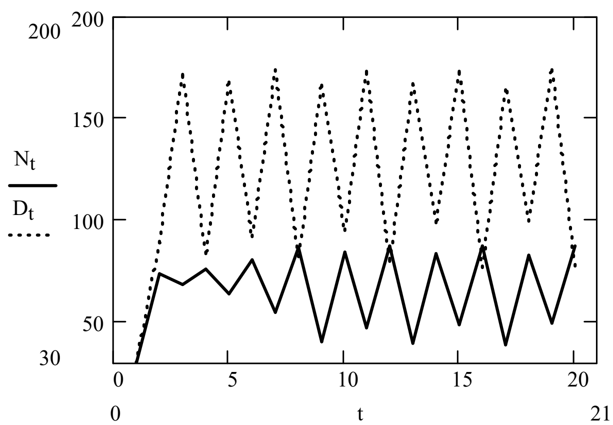


Fig. 4. Model logistic discret al dinamicii populaţionale la λ=3.5

Pentru λ = 4 dispare echilibrul ciclic, iar fluctuaţiile aparent prezintă un model întâmplător, care este denumit **dinamică haotică.** În toate cazurile K nu afectează dinamica, ci doar nivelul la care este realizat echilibrul sau dinamica haotică (fig. 5)

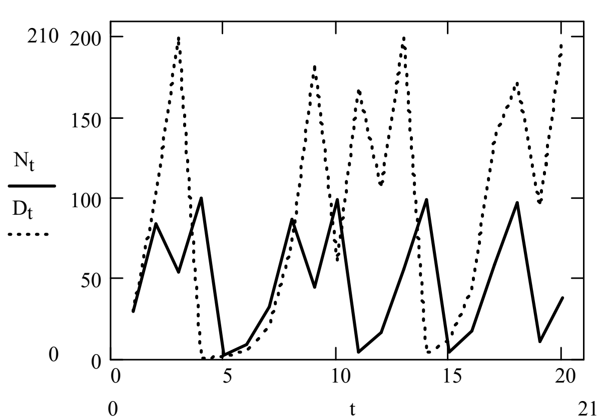


Fig. 5. Model logistic discret al dinamicii populaţionale la λ=4.0

Dinamica haotică a unui fenomen nu înseamnă faptul că acel fenomen este un produs al întâmplării. Multe procese "haotice" pot fi rezultate ale unor fenomene previzibile, deterministe, aşa cum se vede şi din exemplul de mai sus. Nu este întotdeauna simplu să se distingă între randomizare sau stochasticitate şi dinamica haotică (a se revedea cele expuse la analiza seriilor de timp).

Până acum am considerat dependenţa de densitate a probabilităţii de supravieţuire, ca fiind o funcţie liniară. În cazul în care această dependenţă nu este liniară, ci corespunde cu curba de tip 3 din fig. 1, atunci fracţia indivizilor supravieţuitori (s) scade cu abundenţa sau densitatea populaţiei (N) după o funcţie negativă exponenţială, de tipul:

$$s = e^{-aN}$$

unde parametrul a se poate considera ca intensitatea dependenţei de densitate.

Ecuaţia modelului de dinamică populaţională cu dependenţă neliniară de densitate, devine:

$$N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aN_t}$$

aceasta fiind tot o ecuaţie recurentă neliniară de ordinul I, cunoscută sub denumirea de ecuaţia Ricker (1954, ap. Gillman şi Hails, 1997).

Evaluarea parametrilor λ şi a din date reale (experimentale) se realizează cel mai bine prin exprimarea ecuaţiei sub forma unei drepte de regresie astfel: ambii termeni ai ecuaţiei se împart la N_t şi se logaritmează expresia, rezultând ecuaţiile echivalente:

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \lambda e^{-aN_t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{t+1}}{N_t}\right) = \ln(\lambda) - aN_t$$

Prin urmare, datele demografice experimentale se pot reprezenta sub forma unei drepte de regresie de tipul ecuaţiei de mai sus, după care estimăm ln(λ) din intercepţia ordonatei de către dreapta de regresie (lnλ) iar panta dreptei sau coeficientul de regresie va fi egal cu parametrul a.

3. MODELE DINAMICE ÎN TIMP CONTINUU. MODELARE PRIN CALCUL DIFERENŢIAL

Prin diferenţiere (sau derivare) găsim gradienţi pe graficul funcţiei, adică rata instantanee de modificare a unei variabile, ca răspuns la modificarea alteia (altora). Semnificaţia geometrică este evaluarea pantei tangentei la graficul funcţiei în punctul ales.

În cadrul acestui capitol se vor expune tehnici de lucru cu derivate, ecuaţii diferenţiale, precum şi câteva aplicaţii.

Definiţii şi semnificaţii ale funcţiilor derivate

Ecuaţiile diferenţiale apar ca urmare a unor deducţii logice ale proceselor observate, la care se adaugă legile şi teoriile dezvoltate în diferitele ştiinţe. Derivata a apărut ca o necesitate în explicarea unor fenomene fizice (cum ar fi modelarea vitezei) şi matematice (tangenta într-un punct la o curbă în spaţiul bidimensional).

- **Exemplificare: viteza instantanee a unui mobil**

Dacă un mobil se mişcă pe o axă, poziţia acestuia la momentul t_0 fiind $s(t_0)$, iar la momentul t este s(t), iar dacă mişcarea este uniformă, atunci viteza medie v a mobilului este dată de raportul:

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Dacă considerăm intervalul $(t-t_0)$ din ce în ce mai mic, viteza medie respectivă tinde să echivaleze viteza instantanee a mobilului la momentul t_0, adică $v(t_0)$ exprimat ca:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Analog definim acceleraţia mobilului la momentul t_0, $a(t_0)$ ca:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Definiţia derivatei unei funcţii într-un punct:

Fie o funcţie $f : R \to R$ şi x_0 un număr real. Spunem că funcţia f are derivată în punctul x_0 şi o notăm cu $f'(x_0)$ dacă există limita:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dacă derivata funcţiei f în punctul x_0 există şi este finită spunem că funcţia f este derivabilă în punctul x_0.

Executând translaţia $h = x - x_0$, obţinem relaţia echivalentă cu cea anterioară:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dacă y = f(x), atunci următoarele notaţii sunt echivalente:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f) = \frac{d}{dx} f(x)$$

- **Interpretarea geometrică a derivatei**

Dacă funcţia f este derivabilă într-un punct x_0, atunci graficul funcţiei f are tangenta în x_0 dreapta de coeficient unghiular egal cu $f'(x_0)$. Ecuaţia dreptei tangente este:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)*(x - x_0)$$

unde: $f'(x_0)$ este panta dreptei tangente.

Prin urmare: derivata unei funcţii într-un punct este panta dreptei tangente la funcţia respectivă în punctul dat.

Dacă derivata unei funcţii într-un punct este zero, atunci punctul respectiv este un punct de minim sau de maxim (local) al funcţiei respective.

- **Reguli ale derivării; derivatele unor funcţii uzuale**

Prezentăm mai jos în manieră succintă câteva dintre derivatele unor funcţii uzuale:

Derivate ale unor funcţii	**Condiţii**
$c' = 0$	c este o constantă
$x' = 1$	x real
$\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	x pozitiv
$(x^n)' = n\,x^{n-1}$	x este un număr real; n este număr natural
$(x^r)' = r\,x^{r-1}$	r este real; x este un număr real pozitiv.
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	x pozitiv
$(e^x)' = e^x$	x real
$(a^x)' = a^x \ln a$	a pozitiv şi diferit de 1, x real
$(\sin x)' = \cos x$	x real
$(\cos x)' = -\sin x$	x real
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	cos x diferit de 0
$(c\tan x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	sin x diferit de 0
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x ε (-1, 1)
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x ε (-1, 1)
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	x real
$(\mathrm{arc\,cot\,an}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	x real

- **Reguli de derivare**

Dacă f şi g sunt două funcţii derivabile în punctul x_0, iar λ este o constantă, atunci:

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(\lambda * f)' = \lambda * f'$
3. $(f * g)' = f' * g + f * g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' * g - f * g'}{g^2}$

- **Derivate de ordin superior**

Funcţia f este derivabilă de două ori într-un punct x_0 dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 şi f' este derivabilă în x_0. Atunci derivata lui f' în x_0 se numeşte derivata a doua (sau de ordinul 2) a lui f în x_0 şi se notează cu:

$$f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

În mod analog se defineşte derivata de ordin n ($f^{(n)}$). Prin convenţie derivata de ordin 0 este funcţia f ($f^{(0)} = f$), iar derivata de ordinul 1 este prima derivată a funcţiei f ($f^{(1)} = f'$).

Dacă pentru oricare n număr natural funcţia f este de n ori derivabilă, spunem că f este *indefinit derivabilă.*

- **Ecuaţiile diferenţiale** implică o derivată de oricare ordin a uneia sau a mai multor funcţii. Exemple de funcţii diferenţiale:

$$\frac{d}{dt} y(t) = \sqrt{1 + y(t)}$$

$$\left(\frac{d}{dt} u(t)\right) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) = e^{-t} \cdot u(t)$$

Ordinul unei ecuaţii diferenţiale este cea mai mare valoare a unei derivate implicate într-o ecuaţie. În ultimul exemplu, deoarece sunt implicate o derivată de ordinul 1 şi 2 a funcţiei u(t), înseamnă că ordinul ecuaţiei este 2.

Gradul unei ecuaţii diferenţiale este cea mai mare putere la care este ridicată derivata de cel mai înalt ordin al funcţiei (funcţiilor) componente. De exemplu:

$$\left(\frac{d^3}{dt^3}w(t)\right)^4 + \left(\frac{d^2}{dt^2}w(t)\right)^5 + w(t) = 24.6$$

are ordinul 3 şi gradul 4. Deşi există o putere mai mare de 4 în ecuaţie, aceasta se referă la derivata a 2-a a funcţiei, care nu este de cel mai mare ordin.

O ecuaţie diferenţială a funcţiei necunoscute f(x) se numeşte **liniară** dacă derivatele funcţiei şi utilizarea acesteia în expresie sunt la puterea 1, nu se înmulţesc între ele şi nu sunt argumente ale altor funcţii. În caz contrar ecuaţia este de tip **neliniar.**

O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale, este o funcţie care satisface ecuaţia respectivă. Soluţia nu este în mod obligatoriu unică.

Un **sistem de ecuaţii diferenţiale** este alcătuit din două sau mai multe ecuaţii, pentru care se caută soluţii comune sau simultane. Soluţia (sau soluţiile) trebuie să satisfacă (să verifice) toate ecuaţiile din sistem.

Ecuaţiile diferenţiale prezentate până aici se mai numesc şi **ordinare** deoarece conţin funcţii de o singură variabilă. Dacă funcţiile incluse sunt de două sau mai multe variabile, vorbim de **ecuaţii diferenţiale parţiale.** În scrierea matematică, modul de notare şi definire a acestora este diferit de cel al ecuaţiilor diferenţiale ordinare, nu însă şi în unele softuri cu care noi lucrăm mai des.

O ecuaţie diferenţială cuplată cu unele afirmaţii privitoare la soluţii ale momentelor de început sau la condiţii iniţiale, poartă denumirea de **problemă cu valori iniţiale.** De exemplu:

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) - 4 * \frac{d}{dt}h(t) + 2.6 * h(t) = \sin(t) + e^t$$

$h(0)=0 \qquad h'(0) = 1$

este o problemă cu valori iniţiale.

Dacă valorile cunoscute ale soluţiei constau în valori ale funcţiei la începutul şi la sfârşitul unei perioade sau a unui interval dat, atunci definim o **problemă cu valori precizate pe interval.**

Pentru cele mai multe probleme **de ordinul n cu valori iniţiale**, trebuie să definim **n condiţii** (valorile funcţiei şi ale celor n-1 derivate ale acesteia într-un punct) pentru a avea o soluţie unică. În mod similar, pentru problemele de ordin n cu valori definite pe un interval, sunt necesare n condiţii ale marginilor intervalului, pentru ca soluţia să fie unică.

Modele ale dinamicii populaţionale în timp continuu (modele cu ecuații diferenţiale)

Până acum am considerat populaţia ca având generaţii discrete, sau că procesul de reproducere se desfăşoară în mod discret în cadrul unor populaţii cu generaţii suprapuse. În natură însă, aceste trăsături acoperă doar o parte din posibilităţi: numeroase specii nu îşi sincronizează reproducerea, care poate fi astfel considerată ca un proces continuu. Evident modelele de tip recurent nu mai sunt valabile în acest caz; noul model pe care îl căutăm va trebui să se raporteze la un timp continuu, şi astfel am ajuns la **modelele diferenţiale.**

Pentru început vom considera **modele independente de densitate ale creşterii populaţiei în timp continuu.**

Primul model de tip recurent, cu care ne-am confruntat, a fost de tipul $N_{t+1} = \lambda N_t$, care explica modificarea în efectiv sau densitate la două momente diferite. Dacă însă cele două momente sunt extrem de apropiate (adică diferenţa dintre t+1 şi t tinde către zero) modificările sunt instantanee şi pot fi descrise prin ecuaţii diferenţiale. Pentru a simula şi mai bine realitatea, să presupunem că studiem o populaţie cu reproducere continuă şi generaţii suprapuse. Această populaţie poate creşte (o oarecare perioadă de timp şi într-un mediu particular) după o funcţie geometrică exponenţială. Dar la creşterea în timp continuu nu mai utilizăm grafice de tip nor de puncte sau histograme, ci fenomenul îmbracă forma unei curbe continue a unei funcţii exponenţiale, aşa cum este ea ilustrată în fig. 6.

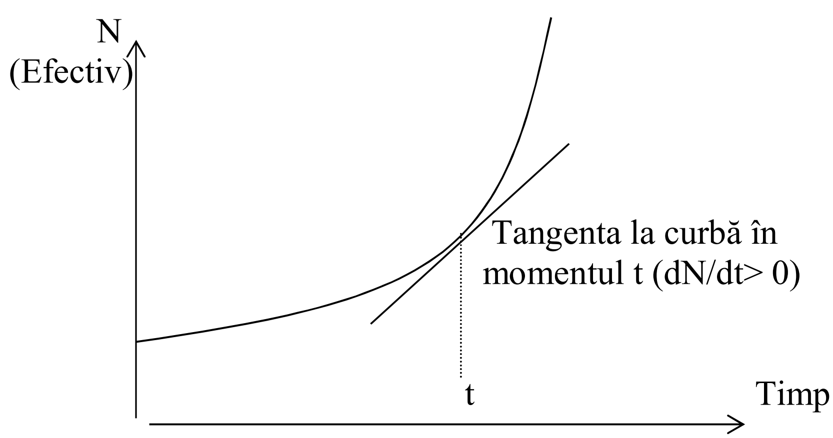


Fig. 6. Creşterea exponenţială a efectivului populaţiei (N) în timp continuu, cu ilustrarea ratei (gradientului) de creştere instantanee a populaţiei la momentul t.

Această creştere exponenţială în timp continuu este modelată prin ecuaţia:

$$N_t = N_0 e^{r t}$$

unde: N_t = efectivul populaţiei la momentul t, N_0 = efectivul la momentul iniţial (la t=0), e este baza logaritmului natural (=2.71...), iar r este rata intrinsecă de creştere numerică a populaţiei (rata de creştere a populaţiei, definită ca un multiplu al efectivului actual). În fiecare punct al acestei curbe este posibil să determinăm rata de modificare a dimensiunii populaţionale prin **diferenţiere**, adică gradientul tangentei în acel punct. Modificarea populaţiei este dată de derivata efectivului N_t în funcţie de timp t, adică dN/dt. Dacă această derivată este pozitivă, populaţia creşte în timp (fig. 6), dacă este negativ populaţia scade, iar la valoare nulă nu sunt modificări în timp (populaţie cu efectiv constant).

Gradientul lui N_t (modificarea instantanee a efectivului) în oricare punct (timp t) este derivata de t a ecuaţiei precedente, adică:

$$\frac{dN}{dt} = rN_0e^{rt}$$

iar ţinând seama că $N_t = N_0\ e^{rt}$, rezultă:

$$\frac{dN}{dt} = rN_t$$

Rata intrinsecă de creştere a populaţiei se consideră adesea ca exprimând valoarea maximă, condiţionată genetic, a creşterii populaţiei în condiţii optime de habitat, cu resurse nelimitate, în absenţa competitorilor şi duşmanilor (**r_m = rata intrinsecă maximă**). **Rata actuală instantanee de creştere (r)** va fi întotdeauna mai mică decât rata intrinsecă (maximă) şi variază în funcţie de constrângerile taxonomice şi de condiţiile de mediu, putând fi evaluată prin metoda tabelelor dinamice de viaţă (a se vedea Sîrbu şi Benedek, 2012).

Estimarea valorii reale a parametrului r se poate face prin logaritmarea ecuaţiei $N_t = N_0e^{rt}$:

$$ln(N_t) = ln(N_0) + rt$$

rezultând o ecuaţie de regresie unde $ln(N_t)$ este variabila dependentă, $ln(N_0)$ este constanta (intercepţia ordonatei la t_0), t fiind variabila independentă, iar r este panta dreptei de regresie.

Introducând în model **dependenţa de densitate liniară** obţinem modelul **logistic de creştere populaţională în timp continuu.** În mod asemănător cu modalitatea de definire a dependenţei de la modelul logistic în timp discret, şi în acest caz putem înmulţi rata instantanee cu termenul (1 - N_t/K) unde acelaşi K, semnifică capacitatea de suport (efectivul maxim care poate fi susţinut de un habitat particular, într-un anumit interval de timp). Prin urmare din ecuaţia:

$$N_t = N_0e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)t}$$

rezultă prin diferenţiere **modelul logistic de creştere în timp continuu a populaţiei**, care descrie în mod simplist o creştere populaţională până la un nivel K de echilibru stabil (fără oscilaţii)**:**

$$\frac{dN}{dt} = rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

Ecuaţia diferenţială a creşterii logistice a fost utilizată pentru prima dată de Verhulst (1838) pentru a descrie creşterea populaţiei umane; se mai numeşte şi ecuaţia Verhulst - Pearl. Prin integrarea ecuaţiei anterioare, rezultă:

$$N = \frac{K}{1 + e^{\left(\ln\frac{K-N}{K} - rt\right)}}$$

Aplicație: rezolvarea ecuaţiei Verhulst-Pearl pentru o perioadă de 40 de ani, capacitate de suport a mediului de 1500 şi rata intrinsecă de creştere populaţională de 0.28. Populația pornește de la efectivul inițial de 150 de indivizi. Rezultatul simulării este redat în fig. 7. Se observă că, în timp, efectivul populațional se stabilizează la nivelul capacității de suport K.

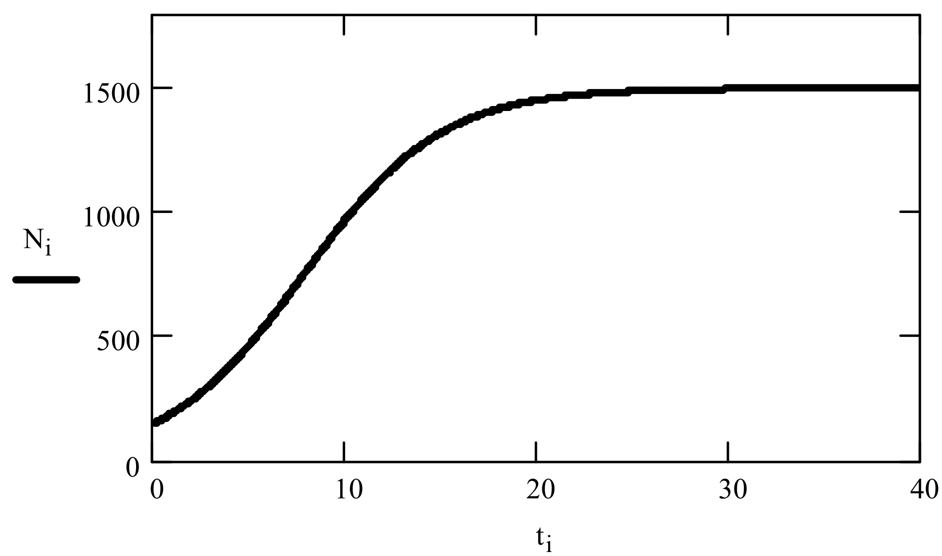


Fig. 7. Modelarea dinamicii populaționale în timp continuu prin ecuația Verhulst-Pearl (N = efectivul populațional, t = timpul în ani; valorile inițiale ale parametrilor sunt redate în text).