CALCUL ŞI MODELARE ÎN MATHCAD

Produsul Mathcad este elaborat de firma MathSoftInc Cambridge, MA, SUA, fiind special conceput pentru modele matematice mai sofisticate, calcule cu grad ridicat de dificultate, realizarea proiectelor complexe, având numeroase facilităţi grafice şi de prezentare a rezultatelor.

Simboluri şi combinaţii de taste utilizate în Mathcad

Pentru a obţine ...	... tastaţi:	semnificaţie:
: =	:	definiţie sau atribuire
a,b .. c	a, , ,b, ; , c	domeniu de variaţie redat ca: a valoare iniţială, b valoarea următoare, iar c este valoarea finală
(x)	‘ , x sau (,x,)	paranteză
x!	x , !	factorial
a^b	a , ^ , b	ridicare la putere
| x |	| , x	modul, valoare absolută, determinant
x + y	x , + , y	adunare
m / n	m , / , n	împărţire
a.b	a , * , b	înmulţire
- c	- , c	minus; număr negativ
a > b	a , > , b	mai mare decât
a < b	a , < , b	mai mic decât
≡	Sfift + ~	definiţie globală
x_i	x , [, i	indice
$x_{i,j}$	x , [, (, i , j ,)	indici dubli
M^T	M , Alt + !	matrice transpusă
$\sum x$	Alt + $, x	sumă vectorială
$\sqrt{x}$	\ , x	radical
$\int f(x) dx$	x , & , f (x)	integrală nedefinită
$\frac{d}{dx} f(x)$	x , ? , f(x)	derivată
$\overline{v}$	Alt+ -	vectorizare
$\sum_i x_i$	i , $, x	sumă după valorile indicelui i din x
$\prod_i x_i$	i , # , x	produs după valorile indicelui i de x

Versiunile noi operează în mod similar cu Microsoft Office, operatorul putând selecta comenzi şi funcţii fie din meniurile pop-up, fie prin scrierea explicită a comenzilor.

Deoarece semnificaţia tastelor şi a combinaţiilor acestora a rămas similară în toate versiunile, vom începe această temă prin expunerea simbolurilor şi a semnificaţiilor acestora (după manualul original, precum şi E. Scheiber şi D. Lixăndroiu, 1994).

Funcţii Mathcad mai des utilizate în studiile de profil

Observaţii: în tabelul de mai jos: x, y reprezintă numere reale, n este un număr natural, v este un vector iar M o matrice

Apelarea funcţiei	**Semnificaţie**
sin (x)	sinus de z
cos (x)	cosinus de x
tan (x)	tg x
asin (x)	arcsin x
acos (x)	arccos x
atan (x)	arctan x
exp (x)	e^{x}
ln (x)	logaritm natural din x (ln x)
log (x)	logaritm zecimal din x (lg x)
rnd (x)	număr aleator cuprins între 0 şi x
length (v)	numărul elementelor vectorului v
max (v)	cel mai mare element al lui v
min (v)	cel mai mic element al vectorului v
rows (M)	numărul liniilor matricei M
cols (M)	numărul coloanelor matricei M
augument (M1, M2)	matricea obţinută prin alăturarea matricilor M1 şi M2, cu acelaşi număr de linii
identity (n)	matricea unitate de ordin n
sort (v)	ordonează crescător elementele vectorului v
csort (M, n)	aranjează liniile matricii M astfel încât elementele coloanei n să fie în ordine crescătoare
rsort (M, n)	aranjează coloanele matricii M astfel încât elementele liniei n să fie în ordine crescătoare
mean (v)	media aritmetică a elementelor vectorului v
var (v)	varianţa elementelor lui v
stdev (v)	abaterea standard a elementelor lui v
corr (vx, vy)	coeficientul de corelaţie Pearson aplicat vectorilor de date vx şi vy
linterp (vx, vy, x)	returnează valoarea în x a funcţiei afine de interpolare, determinată de vectorii vx şi vy
cspline (vx, vy)	redă coeficienţii funcţiei spline cubice de interpolare determinată de vectorii vx şi vy, funcţia fiind cubică la extremităţi
lspline (vx, vy)	redă coeficienţii funcţiei spline cubice de interpolare determinată de vectorii vx şi vy, funcţia fiind liniară la extremităţi
pspline (vx, vy)	redă coeficienţii funcţiei spline cubice de interpolare determinată de vectorii vx şi vy, funcţia fiind parabolică la extremităţi
interp (vs, vx, vy, x)	returnează valoarea în x a funcţiei spline cubice de interpolare determinată de vectorii de date vx şi vy; vs reprezintă vectorul cu coeficienţii funcţiei spline calculate în cspline, lspline sau pspline

Pentru a facilita înţelegerea modului de tastare, vom uni cu simbolul + tastele care se apasă simultan, iar cu operatorul virgulă (,) separăm tastele care se apasă în ordine. Astfel: Shift + 4 semnifică apăsarea simultană a celor două taste, pe când Esc, *, Enter impune apăsarea în ordine secvenţială a tastelor Esc, apoi *, urmate de Enter. Pentru cei cărora le place mai degrabă să lucreze cu meniuri decât să înveţe cele câteva comenzi, le rămâne selectarea funcţiilor şi operatorilor exclusiv din oferta generoasă de comenzi prezentate în stil pop-up.

Toate comenzile de sistem şi de fişiere sunt similare cu cele utilizate de produsele Microsoft Office, icoanele şi cuvintele-cheie fiind identice.

1. CALCULE

Calculele numerice în MathCAD se efectuează prin operatori de atribuire sau definire, expresii matematice şi operatori de afişare.

Operatorii de atribuire / definire sunt definiţi prin **:=** (care se obţine prin tastarea a două puncte :)

variabilă := expresie

funcţie (variabile separate prin virgulă) := expresie

variabilă ≡ expresie

ultima fiind expresia pentru operatorul de definire globală (adică având ca domeniu de valabilitate întregul fişier).

Expresiile matematice sunt redate utilizând variabilele, funcţiile şi parametrii definiţi anterior, utilizând operatorii matematici şi combinaţiile de taste redate în tabelele prezentate anterior.

Operatorul de afişare (întoarcerea rezultatului) este dat de semnul =, în formatul:

variabilă =

expresie =

funcţie (listă variabile) =

Calculele simple se pot scrie explicit, urmate de semnul =, fapt care va determina evaluarea şi afişarea rezultatului acestora. De exemplu tastarea următoarei secvenţe pentru calcularea indicelui de similitudine procentuală Czekanowski (virgula indică operaţii succesive):

(,(, 2 , * , 12 ,), / , (, 36 , + , 39 ,),) , * , 100 , =

produce pe ecran:

$$\frac{2 \cdot 12}{36 + 39} \cdot 100 = 32$$

Semnul egal implică evaluarea expresiei matematice definite anterior. În exemplul anterior am comparat două comunităţi, formate din 36, respectiv 39 de specii, dintre care 12 sunt comune. Calculatorul a evaluat expresia de similitudine la 32%. Aceeaşi prelucrare se poate reda prin definirea unor parametri, în felul următor:

c := 12
a := 36
b := 39

$$Is := \frac{2 \cdot c}{a + b} \cdot 100$$

Is = 32

Cu alte cuvinte, am definit prin operatori de atribuire valorile parametrilor identificaţi prin a, b şi c, am definit expresia lui Is, urmată de solicitarea de afişare a rezultatului.

Identificatorii trebuie să înceapă cu o literă, care poate fi urmată de alte litere, cifre sau semne speciale.

Variabilele numerice de tip şir, se definesc prin:
- un increment i, care ia valori întregi succesive de la 1 la n (de exemplu n = 8)
- variabila x_i care este redată sub forma unei expresii matematice în i sau explicit. Evident variabila şir conţine atâtea valori câte au fost prevăzute prin n. Dacă variabila este definită explicit, separatorul între termenii şirului este dat de tasta virgulă (,)

Expresia generală pentru o variabilă şir este:
indice := valoare1, valoare 2 .. valoare finală
(diferenţa dintre valoare 1 şi valoare 2 va desemna incrementul, iar cele două puncte care urmează valorii 2 desemnează repetarea incrementului până la valoare finală; pentru a obţine cele două puncte se tastează **;**)
variabilă_şir $_{\textbf{indice}}$ **:= valori**
sau
variabilă_şir $_{\textbf{indice}}$ **:= expresie**

Într-un vector sau o matrice valoarea iniţială a indicilor este 0. Dacă se doreşte ca valoarea iniţială (prima probă, prima măsurătoare să fie 1 - aşa cum se preferă adesea în ecologie, trebuie să precizăm acest lucru printr-o definiţie globală a parametrului inclus ORIGIN.

Altfel spus, atunci când calculele vor începe cu prima valoare a unei variabile şir (definită prin indicele i care ia valori întregi succesive de la 1 la n) precizăm în linia de comandă:

ORIGIN ≡ 1

Exemplu: s-au colectat şi prelucrat 31 de probe (de dimensiuni egale, alese randomizat) prin metoda suprafeţelor. Numărul de indivizi din fiecare probă va fi inclus în variabila şir x_i. În acest caz, operatorul tastează următoarea secvenţă:

$$n := 31$$

$$i := 1, 2 .. 31$$

$$x_i :=$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 12 \\ \hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline 7 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 6 \\ \hline 0 \\ \hline 8 \\ \hline 14 \\ \hline 15 \\ \hline 24 \\ \hline 23 \\ \hline 62 \\ \hline 150 \\ \hline 42 \\ \hline 58 \\ \hline 78 \\ \hline 53 \\ \hline 21 \\ \hline 0 \\ \hline 25 \\ \hline 26 \\ \hline 84 \\ \hline 36 \\ \hline 45 \\ \hline 82 \\ \hline 5 \\ \hline 36 \\ \hline 74 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

mean (x) = 31.09
var (x) = 1153.96
stdev (x) = 33.97

$$Err := \sqrt{\frac{var(x)}{n}}$$

$$D := \frac{Err}{mean(x)}$$

$$ID := \frac{var(x)}{mean(x)}$$

Err = 6.10 D = 0.196 ID = 37.11
D = 0.196 ID = 37.11

Dacă în document dorim să includem spaţii pentru text, în versiunile superioare scriem pur şi simplu explicaţiile dorite, iar în versiunile inferioare, marcăm spaţiul pentru text cu ghilimele. De exemplu, dacă dorim după operatorul de afişare Err să precizăm semnificaţia acestuia, vom tasta:

Err =

"Err semnifică eroarea standard a mediei"

Textul inclus între ghilimele nu va fi interpretat ca o expresie matematică şi nici drept comandă, ci va fi ignorat de către calculator.

2. GRAFICE

Dacă se doreşte realizarea unei reprezentări grafice plane (bidimenionale) se selectează simbolul din meniu, după care se înscriu în spaţiile rezervate variabilele şi/sau funcţiile care se reprezintă, precum şi domeniile lor de variaţie (valorile minime şi maxime), ca în exemplul de mai jos.

Să presupunem că am realizat un model de tip regresie liniară univariată.

Fie x = variabila independentă, cu domeniul de variaţie cuprins între 12.1 şi 86.9

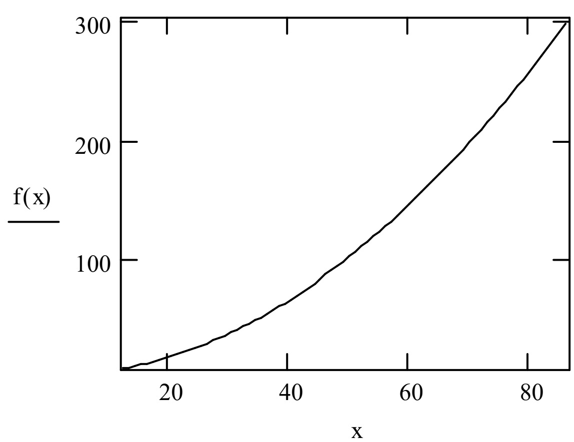
f(x) = funcţia de regresie definită între valorile variabilei dependente y şi ale celei independente x, cu expresia:

$f(x) = 2.4 + 0.04 * x^2$

Pentru a reprezenta grafic această funcţie se tastează următoarea secvenţă:

$x := 12.1 .. 86.9$

$f(x) := 2.4 + 0.04x^2$



De exemplu pentru a estima valoarea variabilei dependente la x = 59.65, se tastează:

f (59.65) =

care va returna automat rezultatul, astfel că pe ecran apare:

f (59.65) = 144.725

În cazul unei regresii duble se apelează fereastra pentru grafice în spaţiul 3D, din meniul corespunzător.

Exemplu:

$f(x,y) := 0.13 + 0.06 \cdot x^2 + 0.1 \cdot y^3$

$i := 0..78$

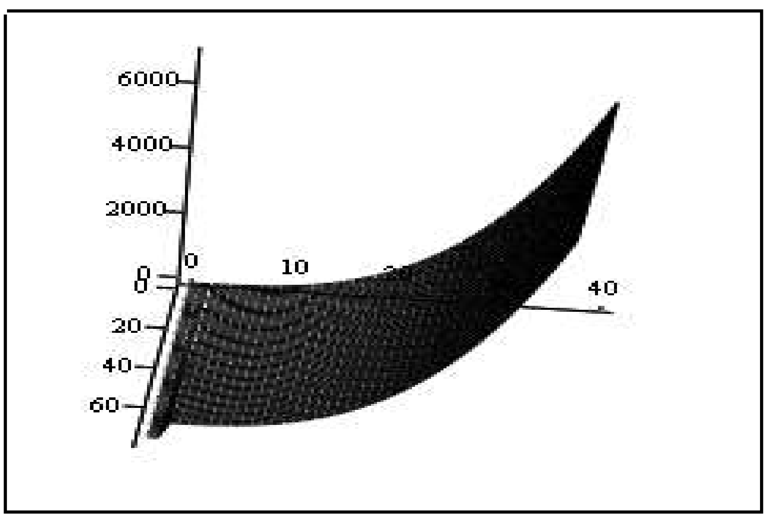
$j := 2..40$

$x_i := 12 + i$

$y_j := 0 + j$

$M_{i,j} := f(x_i, y_j)$

unde f(x,y) este o ecuaţie de regresie bivariată evaluată în programul SYSTAT, i şi j sunt doi incremenţi adaptaţi la modul de variaţie al celor două variabile independente. Cotele suprafeţei de regresie sunt incluse în matricea M, ca noduri într-o reţea dreptunghiulară de puncte (x_i , y_i). În spaţiul marcat (colţul stânga - jos) al ferestrei de definire a graficului, se înscrie numai identificatorul de matrice, în cazul nostru **M**, iar rezultatul va arăta astfel:



M

De asemenea, prin accesarea meniurilor se pot modifica numeroşi parametri ai graficului (se poate roti în toate dimensiunile, mări sau micşora, schimba axele, scările etc.).

MODELE DEFINITE PRIN FUNCŢII DE INTERPOLARE

Interpolarea, reprezentarea grafică şi calcularea estimatei funcţiei de interpolare într-un punct, care nu aparţine reţelei de noduri, este una dintre cele mai utile aplicaţii ale sistemului MathCAD.

Extrem de bune sunt funcţiile de interpolare spline. Date fiind n puncte (x_i, y_i) funcţiile spline cubice au forma:

$$P_i(x) = c_{0i} + c_i(x - x_i) + c_{2i}(x - x_i)^2 + c_{3i}(x - x_i)^3$$

unde i ia valori naturale succesive în domeniul 1, 2 .. n.

În exemplul de mai jos este evaluată o funcţie spline cubică f(x) care trasează forma albiei unui râu, în secţiune transversală, pe baza unei serii de măsurători, se calculează aria secţiunii transversale a râului, lungimea graficului (a albiei în secţiune), iar introducerea unei estimate a vitezei momentane medii de curgere a apei, permite evaluarea debitului.

ORIGIN≡ 1 n := 8

i := 1.. n

vx_i := vy_i :=

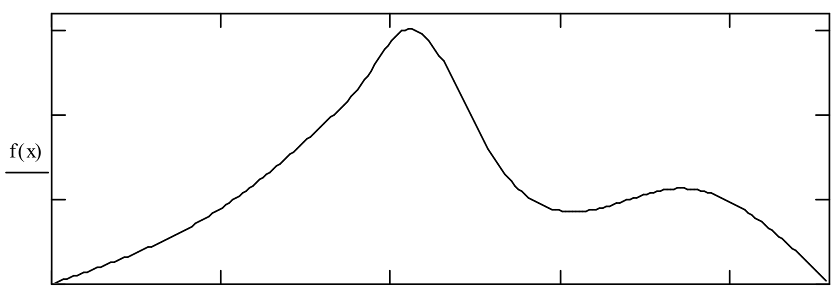
vx_i	vy_i
0.0	0
5.0	.45
8.3	1.0
9.2	1.20
10.4	1.50
12.8	.80
18.7	.56
22.9	0

În calculele de mai jos:
n = numărul de noduri (puncte în care s-au măsurat adâncimile),
vx = distanta în sectiune transversală, fată de un mal
(pozitia nodului in metri, fata de punctul de referinta)
vy = adâncimea măsurată în nodul definit prin vx
f(x) = functia de interpolare
g = aria sectiunii transversale de râu
h = lungimea graficului (a albiei in sectiune transversală)
v = viteza medie a apei la un anumit moment

s := lspline(vx, vy)

f(x) := interp(s , vx, vy , x)

x := 0.0, 0.1.. 22.9



$$g := \int_0^{22.9} f(x)\,dx \qquad h := \int_0^{22.9} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2}\,dx$$

v := 1.3

p := g·v

g = 13.539 h = 23.237 p = 17.6

f(10) = 1.435 Posibilitatea evaluării valorii functiei de interpolare intr-un punct care nu a
retelei de noduri; în acest caz adâncimea estimată la distanta de 10 m = 1.4

PROBLEME ŞI APLICAŢII

1. Alcătuirea unei rutine pentru calcularea indicilor de biodiversitate mai des utilizaţi (biodiversitatea de tip α)

ORIGIN≡ 1

$S := 10$

$i := 1..S$

S semnificã numãrul de specii, X este variabila sir care contine numãrı de indivizi prin care este reprezentatã fiecare specie în probe,
N = numarul total de indivizi din probe.

în urmãtoarele formule d1 = indicele Margalef, d2 = indicele Menhinic
H = Shannon-Wiener, E = echitabilitate, simp = Simpson

În aceste formule s-a utilizat fie logaritmul zecimal, fie în baza 2 pentr
ilustrarea modului de schimbare a bazei

$X_i :=$

15
11
3870
101
6
41
148
129
9
1885

$$N := \sum_i X_i \qquad p_i := \frac{X_i}{N}$$

$$d1 := \frac{S - 1}{\log(N)} \qquad d2 := \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$H := -\sum_i p_i \cdot \left(\frac{\log(p_i)}{\log(2)} \right)$$

$$l2 := \frac{\log(S)}{\log(2)} \qquad simp := \frac{\sum_i X_i \cdot (X_i - 1)}{N \cdot (N - 1)}$$

$$E := \frac{H}{l2}$$

$N = 6215$ $d1 = 2.373$ $d2 = 0.127$ $H = 1.397$ $E = 0.421$ $simp = 0.481$

2. În tabelul de mai jos sunt sunt redate valorile medii ale diversităţii specifice (calculate prin indicele Simpson, codificat prin **vy**) pentru comunităţile bentonice dintr-un râu. Staţiile (de la **S1** la **S8**) sunt poziţionate prin distanţa **vx** faţă de izvor (în km). Să se traseze graficul funcţiei spline de interpolare a diversităţii în relaţie cu distanţa faţă de izvor, şi să se estimeze diversitatea la distanţele de 10, 20, 30, 40, 50 şi 60 km.

	S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**
vx	0,01	12	25	31	45	55	60	79
vy	0,02	0,12	0,10	0,45	0,58	0,40	0,65	0,79

ORIGIN≡ 1

$n := 8$

$i := 1..n$

$vy_i :=$ $vx_i :=$

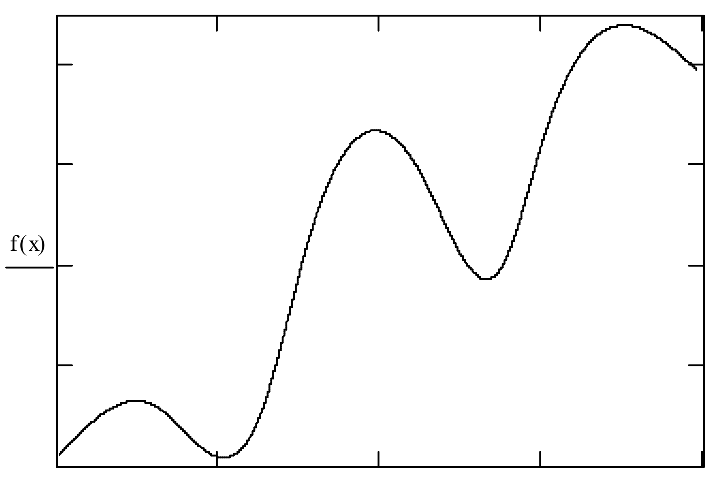
vy_i	vx_i
0.02	0.01
0.12	12
0.10	25
0.45	31
0.58	45
0.40	55
0.65	60
0.79	79

$s := \mathrm{lspline}(vx, vy)$

$f(x) := \mathrm{interp}(s, vx, vy, x)$

$x := 0.0, 0.01..79$

Variatia indicelui Simpson



$f(10) = 0.13$ $f(20) = 0.017$ $f(30) = 0.391$

$f(40) = 0.667$ $f(50) = 0.417$ $f(60) = 0.65$

3. Rutină pentru analiza asocierii dintre specii (pentru partea teoretică a se revedea Sîrbu şi Benedek, 2012)

$a := 48$ $\quad b := 23$

$c := 19$ $\quad d := 22$

$n := a + b + c + d$

$$hip := \frac{n \cdot \left[\left| a \cdot d - b \cdot c \right| - \left(\frac{n}{2} \right) \right]^2}{(a + c) \cdot (b + d) \cdot (a + b) \cdot (c + d)}$$

Valoarea critica a testului la nivelul de asigurare de 0,05 este de 3,84: asocierea este semnificativa numai daca valoarea calculata hip este mai mare!

$hip = 4.045$

coeficienti de asociere - 1. CCM: coeficientul contingentei medii patratice

$$CCM := \sqrt{\frac{hip}{n + hip}}$$

2. C1, 2, 3 = coeficientii lui Cole si erorile standard: Daca ad >=bc atunci C1, e1

$$C1 := \frac{a \cdot d - b \cdot c}{(a + b) \cdot (b + d)}$$

$$e1 := \sqrt{\frac{(a + c) \cdot (c + d)}{n \cdot (a + b) \cdot (b + d)}}$$

Daca bc>ad si d>=a atunci C2, e2

$$C2 := \frac{a \cdot d - b \cdot c}{(a + b) \cdot (a + c)}$$

$$e2 := \sqrt{\frac{(b + d) \cdot (c + d)}{n \cdot (a + b) \cdot (a + c)}}$$

Daca bc>ad si a>d atunci C3, e3

$$C3 := \frac{a \cdot d - b \cdot c}{(b + d) \cdot (c + d)}$$

$$e3 := \sqrt{\frac{(a + b) \cdot (a + c)}{n \cdot (b + d) \cdot (c + d)}}$$

Indicele de afinitate - Fager

$na := a + c$ $nb := a + b$

$$iab := \frac{2 \cdot a}{na + nb}$$

$$tt := \left[\frac{(na + nb) \cdot (2 \cdot a - 1)}{2 \cdot na \cdot nb} - 1\right] \cdot \sqrt{na + nb - 1}$$

$t := |tt|$

$gl := na + nb - 2$

****

Rezultate - pentru tabelul de contingenta

$hip = 4.045$ $a \cdot d = 1.056 \times 10^{3}$ $b \cdot c = 437$

$CCM = 0.187$ $d = 22$ $a = 48$

$C1 = 0.194$ $C2 = 0.13$ $C3 = 0.336$

$e1 = 0.088$ $e2 = 0.059$ $e3 = 0.152$

Rezultate pentru analiza de afinitate: iab=indicele Fager, t=valoare test, gl= grade de libertate:

$t = 4.424$ $gl = 136$ $iab = 0.696$

Daca t calculat este mai mare decat valoarea critica la nivelul de asigurare ales si gl grade de libertate, afinitatea este semnificativa.

****

4. Rutină pentru evaluarea lăţimii şi suprapunerii nişelor ecologice

Acest exemplu serveşte şi pentru deprinderea modului de definire şi operare cu matrici. Pentru a defini o matrice, se alege simbolul corespunzător din meniul de calcul. Apare o fereastră (*Insert Matrix*) în care se introduc numărul de rânduri (*Rows*) şi de coloane *(Columns*), după care se inserează matricea în locul dorit (*OK*) şi se completează cu valorile corespunzătoare.

În exemplul de mai jos considerăm o matrice de 7 resurse, exploatate în comun de o comunitate formată din 5 populaţii.

În matricea care apare ne deplasăm cu săgeţi sau cu Enter, şi umplem spaţiile definite prin pătrate negre, cu valorile corespunzătoare. Restul rutinei de mai jos este autoexplicativă. Pentru partea teoretică a se revedea Sîrbu şi Benedek, 2004.

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1 \qquad n := 7 \qquad k := 5$

$j := 1..n \qquad i := 1..k \qquad h := 1..k$

$$p := \begin{pmatrix} 0.15 & 0.05 & 0.12 & 0.43 & 0.17 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0.94 & 0.06 & 0 & 0 & 0 \\ 0.41 & 0.16 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0.23 \\ 0 & 0.48 & 0.02 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0 & 0.24 & 0.31 & 0.41 \end{pmatrix}$$

$a_j :=$

0.05
0.07
0.01
0.12
0.29
0.14
0.32

$p_{1,1} = 0.15$ accesarea unui termen al matricii

$S_i := \sum_j p_{i,j}$ verificarea sumei pe linii a matricii de resurse

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EVALUAREA LATIMII NISELOR

$$B_i := \frac{1}{\sum_j \left(p_{i,j}\right)^2}$$

Indicele Levins - B

$$BA_i := \frac{B_i - 1}{n - 1}$$

Indicele Levins - B standardizat

$$FT_i := \sum_j \sqrt{p_{i,j} \cdot a_j}$$

Indicele Smith

REZULTATE:

$B_i =$	$BA_i =$	$FT_i =$
3.852	0.475	0.735
1.127	0.021	0.182
3.823	0.47	0.75
2.08	0.18	0.462
3.102	0.35	0.904

EVALUAREA SUPRAPUNERII NISELOR ECOLOGICE

Indicele Pianka

$$O_{i,h} := \frac{\sum_j p_{i,j} \cdot p_{h,j}}{\sqrt{\left[\sum_j \left(p_{i,j}\right)^2\right] \cdot \left[\sum_j \left(p_{h,j}\right)^2\right]}}$$

Indicele standardizat HS

$$HS_{i,h} := \frac{\sum_j \left(a_j \cdot \sqrt{p_{i,j} \cdot p_{h,j}}\right)}{\sqrt{\left[\sum_j \left(a_j \cdot p_{i,j}\right)\right] \cdot \left[\sum_j \left(a_j \cdot p_{h,j}\right)\right]}}$$

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0.289 & 0.428 & 0.188 & 0.24 \\ 0.289 & 1 & 0.201 & 0.029 & 0.018 \\ 0.428 & 0.201 & 1 & 0.222 & 0.395 \\ 0.188 & 0.029 & 0.222 & 1 & 0.419 \\ 0.24 & 0.018 & 0.395 & 0.419 & 1 \end{pmatrix}$$

$$HS = \begin{pmatrix} 1 & 0.498 & 0.51 & 0.346 & 0.487 \\ 0.498 & 1 & 0.21 & 0.033 & 0.015 \\ 0.51 & 0.21 & 1 & 0.173 & 0.778 \\ 0.346 & 0.033 & 0.173 & 1 & 0.389 \\ 0.487 & 0.015 & 0.778 & 0.389 & 1 \end{pmatrix}$$

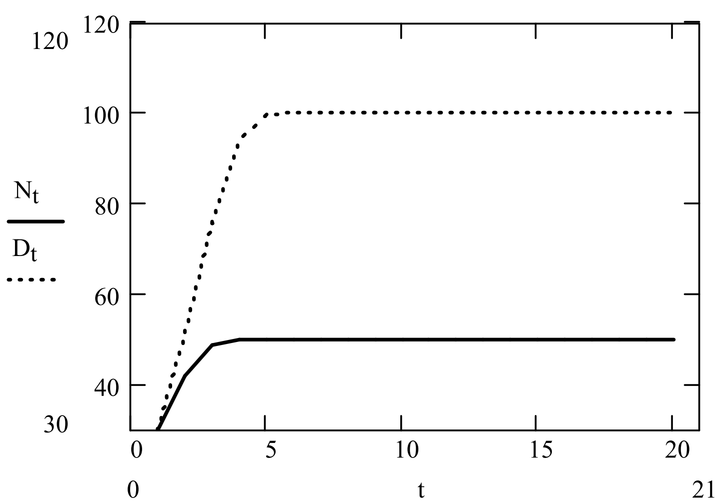
5. Model logistic în timp discret al dinamicii populaţionale (prin ecuaţie recurentă)

Creşterea logistică a populaţiei este prezentată sub forma unei aplicaţii în Mathcad. Sunt simulate dinamicile a două populaţii caracterizate prin λ (rata fundamentală de creştere sau factorul multiplicativ al modificării numerice a populaţiei per generaţie), K1 şi K2 (capacităţile de suport ale mediului), t = timpul (vom simula o perioadă de 20 de ani), iar N şi D sunt efectivele (sau abundenţele, densităţile etc.) celor două populaţii, considerând că ambele au la începutul perioadei câte 30 de indivizi. Tastaţi secvenţa de mai jos:

$K1 := 100 \quad K2 := 200 \qquad \lambda := 2 \quad t := 1..20$

$N_1 := 30 \quad D_1 := 30$

$$N_{t+1} := \lambda \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K1}\right) \qquad D_{t+1} := \lambda \cdot D_t \cdot \left(1 - \frac{D_t}{K2}\right)$$



Model logistic discret al dinamicii populaţionale la λ=2.0

Păstraţi datele iniţiale ale problemei, dar obţineţi graficele (modelele) corespunzătoare pentru λ = 3.0, apoi λ = 3.5 şi λ = 4.0, modificând corespunzător scara valorilor, pentru ca dinamica să fie evidentă. Ce constataţi?

Priviţi graficele în cele 4 cazuri: pentru λ = 2.0 aţi obţinut o stare staţionară a populaţiilor la nivelurile K1 pentru N şi K2 pentru D (stare staţionară liniară); pentru λ = 3.0 s-a obţinut un echilibru oscilant în două puncte (unul de maxim şi celălalt de minim), la λ = 3.5 este echilibru oscilant în 4 puncte, iar la λ = 4.0 rezultă o dinamică haotică. În spatele unei variaţii haotice se poate afla în orice moment un simplu model determinist!